EPFL 2022-2023 **Nom :** ______________________________

GC BA3 **Prénom :** ______________________________

Examen – Modélisation Numérique des Solides et Structures : partie pratique.

Notes et livre du cours autorisés

2h, 24 points ($\frac{2}{3}$ de la note de l'examen écrit)

Indication : Aucun des exercices ne nécessite de calculs lourds

Exercice 1 : ***Essai oedométrique avec gravité, 12 points***

On considère un bloc cylindrique de section circulaire de surface A, et de hauteur H dans la direction z (voir figure 1). Il est placé dans un conteneur indéformable de même géométrie. Le contact entre le conteneur et le bloc est sans frottement et sans détachement.

Un piston indéformable, astreint à coulisser dans le conteneur, est en contact sans frottement et sans détachement avec la partie supérieure du bloc.

Le bloc est constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope homogène, de caractéristiques ρ, λ, μ et on appelle $E^* = \lambda + 2\mu$. Le piston est soumis à un déplacement vertical $(-\delta \boldsymbol{e_z})$. Pour commencer on néglige

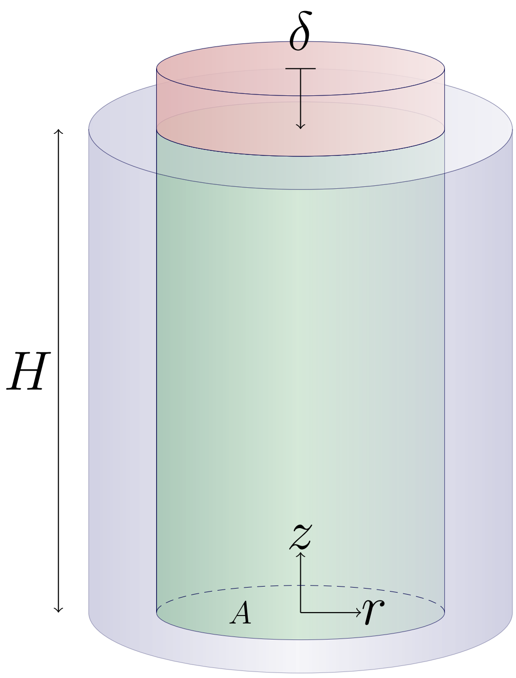

FIGURE 1 – Le bloc cylindrique de section constante A et de hauteur H est confiné par une paroi rigide (bleu) de même rayon que le cylindre non déformé (vert). Le piston (rouge) est déplacé rigidement de δ dans la direction des z négatif.

les effets de la gravité. On propose comme solution à ce problème le champ de déplacement :

$$\boldsymbol{u}(r, \theta, z) = u(z)\boldsymbol{e}_z = \left(a\frac{z^2}{H^2} + b\frac{z}{H} \right) \boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

(1) Trouver la relation entre a et b pour que les conditions aux limites soient satisfaites. (1 point)

We verify that $u(z=0)=0$, $\forall a,b$. By imposing $u(z=H)=-\delta$, we obtain $a+b=-\delta$

(2) Calculer le tenseur des déformations (1 point)

Given the simple expression for the displacement the strain is simply obtained by

$$\epsilon_{zz}(z) = \frac{du(z)}{dz} = \frac{b}{H} + \frac{2az}{H^2}\,, \tag{2}$$

while all the other components are null.

(3) Montrer que l'énergie élastique totale U_{tot} est : (2,5 points)

$$U_{tot} = \frac{AE^*\left(3\delta^2 + a^2\right)}{6H}.$$

In order to compute the strain energy density we first compute the stress from the linear elastic law :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \mathrm{tr}(\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \lambda\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & E^*\epsilon \end{pmatrix} \tag{3}$$

From this the elastic strain energy is

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{zz}\epsilon_{zz} = \frac{1}{2}E^*\epsilon_{zz}^2 = \frac{E^*}{2}\left(\frac{b}{H} + \frac{2az}{H^2}\right)^2 \tag{4}$$

The total energy is simply obtained by integrating the density over the volume

$$U_{tot} = \int_V \mathcal{U} dV = A\int_0^H \frac{E^*}{2}\left(\frac{b}{H} + \frac{2az}{H^2}\right)^2 dz = AE^*\left(\frac{2a^2}{3H} + \frac{ab}{H} + \frac{b^2}{2H}\right) = \frac{AE^*\left(3\delta^2 + a^2\right)}{6H} \tag{5}$$

where in the last step we made use of the relationship $a+b=-\delta$ found before.

(4) Le système étant en déplacement contrôlé, le travail des forces extérieures est nul et l'énergie potentielle est donc égale à l'énergie élastique. Trouver les paramètres du champ de déplacement qui minimisent cette énergie potentielle. Auriez-vous pu intuiter ce champ de déplacement ? Pourquoi ? La solution trouvée est-elle exacte ? ? Commenter brièvement sans calcul (1,5 points)

The minimal energy principle reads in our case :

$$\frac{dU_{tot}}{da} = 0 \rightarrow \frac{AE^*a}{3H} = 0 \iff a = 0 \tag{6}$$

As a consequence we find $b=-\delta$ and a linear displacement field, $u(z)=-\delta z/H$ and a constant strain field $\epsilon = -\delta/H$. Given the displacement imposed to the cylinder and the geometry of the problem, we could have guessed the linear displacement field.

The solution is indeed the exact one because the problem is identical to ex. 2 series 10, where we already verified :

— the equilibrium equation $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = 0$

— the solution is continuous and integrable in the whole domain

— boundary conditions

On prend maintenant en compte l'effet de la gravité qui agit dans la direction des z négatifs. Le piston subit toujours le même déplacement δ. On garde le champ de déplacement défini à l'équation 1.

(5) Montrer que le travail W exercé par le champ gravitationnel est : (1 point)

$$W = A\rho g H\left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right)$$

The work done by the volume force is

$$W = \int_V \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{u}\, dV = A \int_0^H -\rho u g\, dz = A\rho g H\left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right) \tag{7}$$

(6) Minimiser l'énergie potentielle totale pour trouver les nouvelles valeurs de a et b. Commenter votre solution. (1,5 points)

The total energy is now the difference between the energy computed previously and the work done by gravity

$$U'_{tot} = U_{tot} - W = \frac{AE^*\left(3\delta^2 + a^2\right)}{6H} + A\rho g H\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right). \tag{8}$$

By computing the derivative with respect to the parameter a we find

$$\frac{dU'_{tot}}{da} = 0 \rightarrow \frac{AE^* a}{3H} - \frac{\rho A g H}{6} = 0 \iff a = \frac{\rho g H^2}{2E^*} \tag{9}$$

Exploiting the boundary condition we obtain $b = -\delta - \frac{\rho g H^2}{2E^*}$. The body force made the displacement field quadratic.

(7) Calculer la pression exercée par la paroi. Quelle condition doit satisfaire δ pour éviter que le cylindre se détache de la paroi (c'est-à-dire pour avoir $p > 0$) ? (2 points)

By substituting the values of a and b we obtain

$$u(z) = \frac{z\left(-2E^*\delta - H^2\rho g + H\rho g z\right)}{2E^* H}, \tag{10}$$

$$\epsilon(z) = -\frac{\delta}{H} + \frac{\rho g}{E^*}\left(z - \frac{H}{2}\right). \tag{11}$$

The stress tensor is the same as in equation 3. It follows that

$$p = -\sigma_r = \lambda\left[\frac{\delta}{H} + \frac{\rho g}{E^*}\left(\frac{H}{2} - z\right)\right]. \tag{12}$$

The minimum pressure is obtained at the top and imposing $p(z = H) > 0$ yields

$$\delta > \rho g H^2/(2E^*). \tag{13}$$

(8) Donner l'expression de la contrainte tangentielle maximale. La calculer pour les points à $z = 0$ et dessiner le cercle de Mohr pour ces points. Pourquoi la calcule-t-on à $z = 0$? (1,5 points)

As the stress tensor is diagonal the stress components are the principal ones. Since $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_2$ the Mohr circle is the one passing through the point σ_2 and $\sigma_{zz} = \sigma_1$. The maximum tangential stress is computed with the usual formula :

$$\tau_{max}(z) = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = \mu\left|-\frac{\delta}{H} + \frac{\rho g}{E^*}\left(z - \frac{H}{2}\right)\right| \tag{14}$$

Given equation 13, it turns out τ_{max} is maximum for $z = 0$

$$\tau_{max}(z = 0) = \mu\left(\frac{\delta}{H} + \frac{\rho g H}{2E^*}\right) \tag{15}$$

The Mohr circle is shown in figure 2, where $\epsilon = -\frac{\delta}{H} - \frac{\rho g H}{2E^*}$.

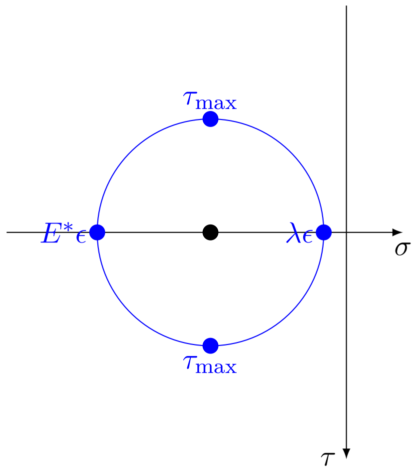

FIGURE 2 – Mohr circle

Exercice 2 : ***Disque intervertébral, 8 points***

Le disque intervertébral humain est un vaisseau à paroi épaisse. L'image en figure 3 montre sa composition en couches fibreuses stratifiées avec un noyau gélatineux (nucleus pulposis). La paroi structurelle stratifiée est fermement attachée aux vertèbres adjacentes. On peut estimer approximativement les contraintes générées dans l'anneau par le rapprochement des vertèbres et la compression du disque.

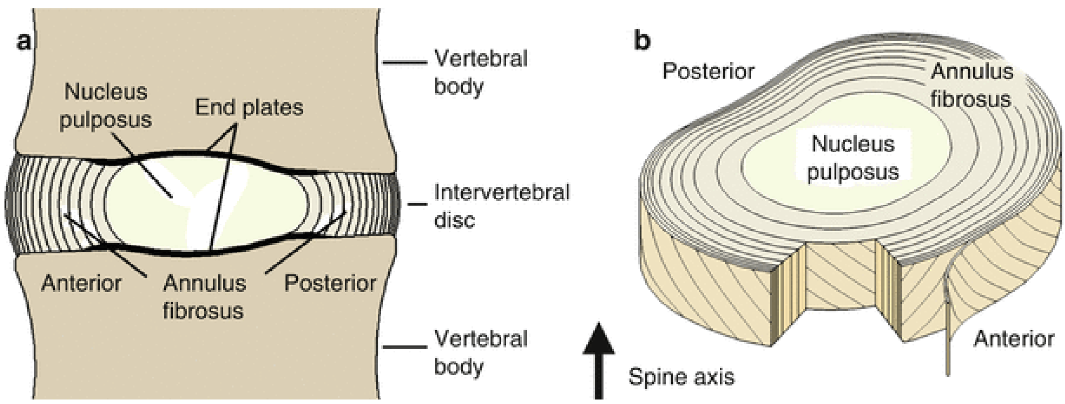

FIGURE 3 – Disque intervertébral

Modélisons le disque comme un anneau isotrope linéaire élastique (E, ν) rempli d'un fluide incompressible (figure 4). Lorsque la charge F est transmise d'une vertèbre à l'autre, une partie de la charge est transmise par la pression P dans le fluide et une autre partie par une contrainte axiale σ_{zz} appliquée à l'anneau. Supposons que le disque soit uniformément comprimé. On considère également que $u_r << 1$ et $\varepsilon_{zz} << 1$.

(1) Les contraintes en tout point de l'anneau sont similaires à celles d'un tube à paroi épaisse, soumis à une pression interne et une contrainte uniaxiale en z. En coordonnées cylindriques, on donne :

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2}(1 - \frac{b^2}{r^2})$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2}(1 + \frac{b^2}{r^2})$$
$$\sigma_{zz} = \text{cst}$$

Les autres composantes sont nulles.
Calculer les contraintes sur la paroi de l'anneau en contact avec le fluide. Commenter le résultat. (1 point)

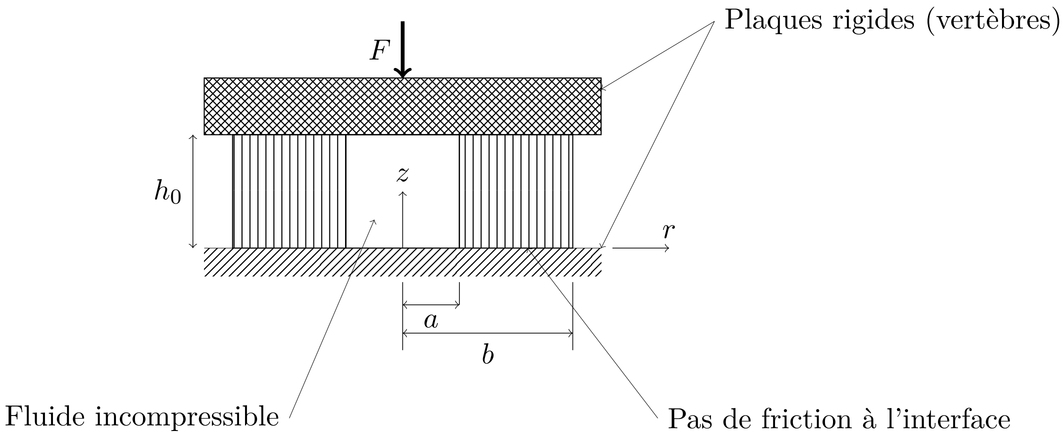

Figure 4 – Géométrie du problème.

Correction :
Sur la paroi fluide/anneau, on a $r = a$. On y évalue les contraintes et on obtient les résultats suivants :

$$\sigma_{rr}(a) = -P$$
$$\sigma_{\theta\theta}(a) = P\left(\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}\right)$$

(2) Donner le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. (1.5 points)

Correction :
Le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

A partir de la formule suivante, on trouve le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E}((1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu \mathbf{tr}\boldsymbol{\sigma})$$

On obtient :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}\left(\frac{a^2P}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) - \nu\frac{a^2P}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right) - \nu\sigma_{zz}\right)$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}\left(\frac{a^2P}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right) - \nu\frac{a^2P}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) - \nu\sigma_{zz}\right)$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - 2\nu\frac{a^2P}{b^2-a^2}\right)$$

(3) Donner le champ de déplacement $\underline{u}$ de l'anneau. En coordonnées cylindriques, la relation entre déplacement et déformation est la suivante :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Les constantes d'intégration sont supposées nulles. (1.5 points)

Correction :
Le champs de déplacement $\underline{u}$ est :

$$\underline{u} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} \frac{a^2P}{b^2-a^2}\left(r+\frac{b^2}{r}\right) - \nu\frac{a^2P}{b^2-a^2}\left(r-\frac{b^2}{r}\right) - \nu\sigma_{zz}r \\ 0 \\ \left(\sigma_{zz} - 2\nu\frac{a^2P}{b^2-a^2}\right)z \end{bmatrix}$$

(4) En supposant que le fluide est incompressible, donner la relation entre $u_r(a)$ et $u_z(h_0)$. Sachant que $u_r << 1$ et $\varepsilon_{zz} << 1$, on négligera les termes d'ordre ≥ 2. (1.5 points)

Correction :
En supposant que le fluide est incompressible, le volume reste inchangé.

$$\pi a^2 h_0 = \pi(a + u_r(a))^2(h_0 + u_z(h_0))$$
$$a^2 h_0 = (a^2 + u_r(a)^2 + 2au_r(a))(h_0 + u_z(h_0))$$

Sachant que $u_r << 1$ et $\varepsilon_{zz} << 1$, on néglige les termes de second ordre.

$$au_z(h_0) = -2h_0 u_r(a) \tag{16}$$

(5) En utilisant la relation trouvé dans la question précédente, et en remplaçant $u_r(a)$ et $u_z(h_0)$ par l'évaluation de $\underline{u}$ en a et h_0, on peut trouver la relation liant la pression du fluide P à la contrainte σ_{zz} de l'anneau suivante :

$$\sigma_{zz}\left(\frac{2\nu-1}{2}\right) = P\left(\frac{\gamma^2+1}{\gamma^2-1} - \frac{\nu}{\gamma^2-1} + \nu\right)$$

A partir de cette formule, trouver le rapport entre la force reprise par le fluide F_{fluide} et celle reprise par l'anneau F_{anneau}, en fonction de $\gamma = b/a$. (1.5 points)

Correction :
Les forces F_{fluide} et $F_{annulus}$ sont calculées de la manière suivante :

$$F_{fluide} = -P(\pi a^2)$$
$$F_{anneau} = \sigma_{zz}\pi(b^2 - a^2)$$

Le rapport entre ces deux forces est donné par :

$$\frac{F_{fluide}}{F_{anneau}} = \frac{-P}{\sigma_{zz}}\frac{1}{\gamma^2-1}$$
$$= \frac{1-2\nu}{2}\frac{1}{\gamma^2(1+\nu)+1-2\nu}$$

(6) Pour quelle condition sur $\gamma = b/a$ a-t-on l'aire du fluide égale à l'aire de l'anneau. Que vaut le rapport F_{fluide}/F_{anneau} dans ce cas là ? (1 point)

Correction :
L'aire du fluide égale à celle de l'anneau nous donne :

$$\pi a^2 = \pi(b^2 - a^2)$$
$$\gamma = \sqrt{2}$$

Le rapport F_f/F_a donne :

$$\frac{F_{fluide}}{F_{anneau}} = \frac{1-2\nu}{6}$$

Exercice 3 : ***Corps soumis à une pression externe, 4 points***

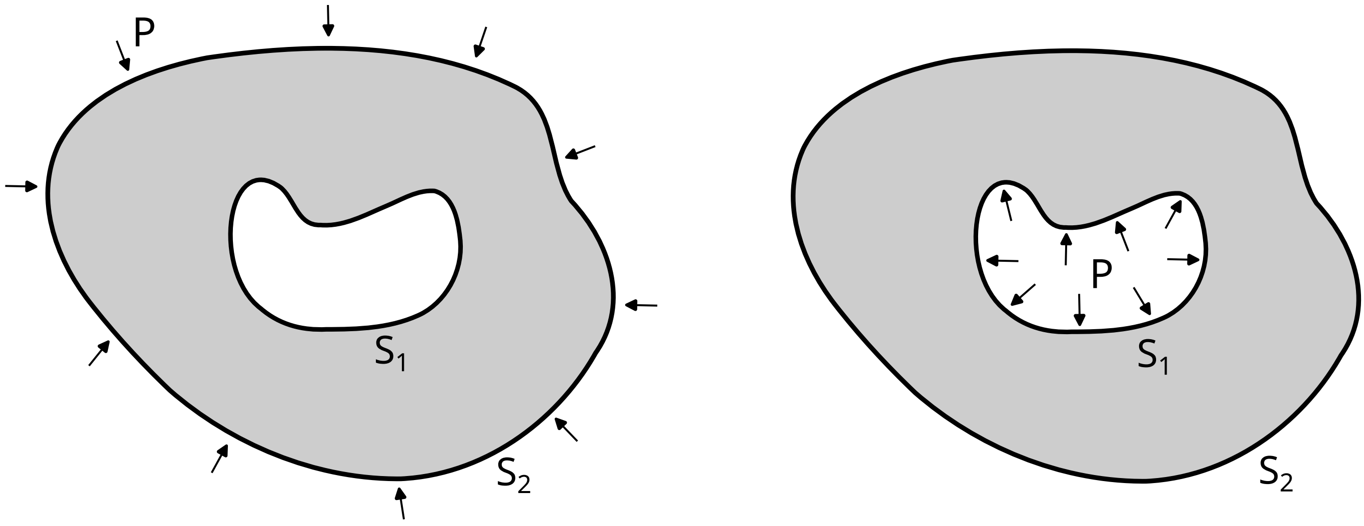

Figure 5 – **Gauche :** corps soumis à une pression externe (problème à résoudre). **Droite :** corps soumis à une pression interne (problème dont on connait la solution).

On cherche à trouver le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dans un solide soumis à une pression externe uniforme sur sa surface S_2 (figure 5 gauche). On considère que l'on connait déjà le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma_1}$ de ce même solide lorsqu'il est soumis à une pression interne uniforme sur sa surface S_1 (figure 5 droite). On cherche à résoudre ce problème à l'aide d'une simple superposition.

Trouver le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Représenter schématiquement votre raisonnement et expliquer le principe utilisé.

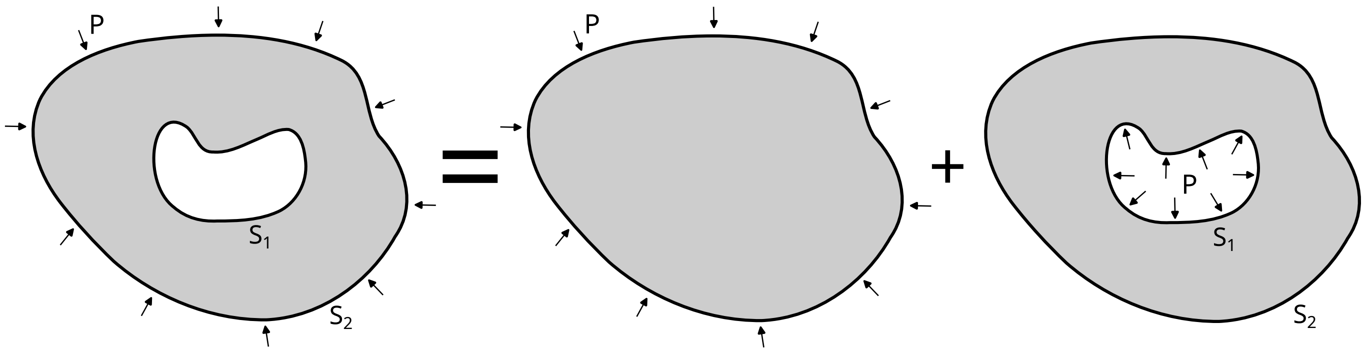

Figure 6 – Utilisation du principe de superposition pour résoudre le problème.

On résout ce problème en utilisant le principe de superposition qui s'applique pour un solide élastique linéaire. Le problème étudié est la superposition des deux problèmes montrés dans la figure 6.

Le solide représenté au centre de la figure 6 est soumis à une pression hydrostatique sur toute sa surface S_2. Le tenseur des contraintes est donc :

$$\boldsymbol{\sigma_2} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix}.$$

L'équation d'équilibre en absence de force volumique $\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma_2}) = 0$ est satisfaite par ce tenseur des contraintes.

La solution finale du problème est donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma_2} - \boldsymbol{\sigma_1} = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} + \boldsymbol{\sigma_1}.$$